Pentatic Mathematics Competition VII

18 September 2020 – 20 September 2020

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Disarankan untuk mengerjakannya menggunakan laptop.
3. Lama pengerjaan soal adalah 2 hari, dari tanggal 19 September 2020 sampai 20 September 2020 pada jam $23:59$.
4. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur, maupun alat bantu hitung lainnya.
5. Terdiri dari 2 bagian: kemampuan dasar dan kemampuan lanjut.
6. Untuk kemampuan dasar:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 2 (dua) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapat -1 (minus satu) poin,
   (d). Untuk soal yang **tidak dijawab** atau **kosong**, mendapat 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 5 (lima) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah** atau **kosong (tidak dijawab)**, mendapat 0 (nol) poin,
8. Jawaban untuk setiap soal dipastikan bilangan cacah (0, 1, 2, 3, dan seterusnya).
9. Selamat mengerjakan!

1 Kemampuan Dasar

1. Sebuah persegi memiliki panjang diagonal 8 satuan. Tentukan luas dari persegi tersebut.

2. Garis $y = ax + b$ melalui titik $(2, 1)$ dan sejajar dengan garis $y = 4x - 1$. Tentukan nilai dari $a - b$.

3. Diberikan barisan aritmetika yang suku-sukunya adalah $a_1, a_2, a_3, \cdots$. Jika $a_{1010} = 2021$ dan $a_{2020} = 4041$, maka tentukan nilai a_{3030}.

4. Jumlah kaki-kaki dari beberapa kambing, ayam, dan tikus adalah 20 kaki. Jika banyak seluruh kambing, ayam, dan tikus berjumlah 6 ekor, tentukan jumlah dari banyak kambing dan tikus.

5. Diberikan grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dan menyinggung sumbu-x di titik $(2, 0)$. Tentukan nilai dari $\dfrac{c-b}{a}$.

6. Penta ingin membuat gedung yang terdiri dari 3 kubus berukuran $1 \times 1 \times 1$, 2 balok berukuran $1 \times 1 \times 2$, dan 5 balok berukuran $1 \times 1 \times 3$ bersusun keatas dimana semuanya harus terpakai. Tentukan banyak cara Penta membuat gedung tersebut.

7. Diberikan enam buah balok yang berukuran besar. Dipilih empat balok berukuran besar, lalu masing-masing dipotong menjadi sepuluh balok berukuran sedang. Dipilih 20 balok berukuran sedang, lalu masing-masing dipotong menjadi 35 balok berukuran kecil. Tentukan banyak balok seluruhnya.

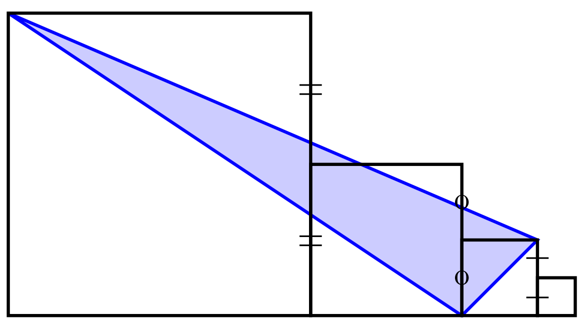
8. Diberikan bilangan real a, b, c, d tak nol yang memenuhi

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 7$$
$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{7}{3}$$

Tentukan nilai dari

$$9\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2\right]$$

9. Diberikan sebuah persegi besar. Dibuat persegi yang lebih kecil di sebelah kanan persegi terbesar dengan panjang sisi setengah dari panjang sisi persegi lebih besar. Lalu, dibuat persegi yang lebih kecil lagi dengan cara yang sama hingga terbentuk empat persegi seperti gambar berikut.



Jumlah luas dari empat persegi tersebut adalah 340 satuan luas. Tentukan luas daerah yang diarsir.

10. Misalkan akar-akar dari persamaan kuadrat dari $x^2 + ax + b = 0$ adalah x_1 dan x_2 serta memenuhi $x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1^3 + x_2^3 = 52$. Jika persamaan kuadrat $2x^2 - px + q = 0$ memiliki akar-akar $x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}$ dan $x_2^2 + \frac{1}{x_1^2}$, tentukan nilai dari $3(a + b + p + q)$.

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan bilangan bilangan bulat $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2020}$ sehingga
$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_1+a_2+a_3, \quad a_1+a_2+a_3+a_4, \quad \cdots, \quad a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2020}$$
merupakan bilangan bulat berurutan. Tentukan nilai dari $a_2a_3a_4\cdots a_{2020}$.

2. Tentukan banyak bilangan asli genap yang habis membagi $2^4 \times 3^5 \times 5^7$.

3. Terdapat 10 kado dengan 2 warna hijau, 5 warna biru, dan 4 warna merah. Kado yang memiliki warna sama identik. Kado-kado tersebut akan diberikan kepada Wildan, Bagus, dan 8 orang lainnya dimana setiap anak menerima 1 kado. Peluang Wildan mendapatkan kado hijau dan Bagus mendapatkan kado merah dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p,q) = 1$. Tentukan nilai $p \times q$.

4. Misalkan H merupakan perpotongan garis-garis tinggi segitiga lancip ABC. Misalkan H_A merupakan pencerminan titik H terhadap sisi BC, titik H_B merupakan pencerminan titik H terhadap sisi AC, dan titik H_C merupakan pencerminan titik H terhadap sisi AB. Tentukan jumlah dari besar $\angle BH_AC + \angle CH_BA + \angle AH_CB$.

5. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c) sehingga $2 \cdot 3^a + 3^b = 3^c$.

6. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y) sehingga $x^2 + y^2$ habis dibagi 49 dimana $x \leq 2020$ dan $y \leq 2020$.

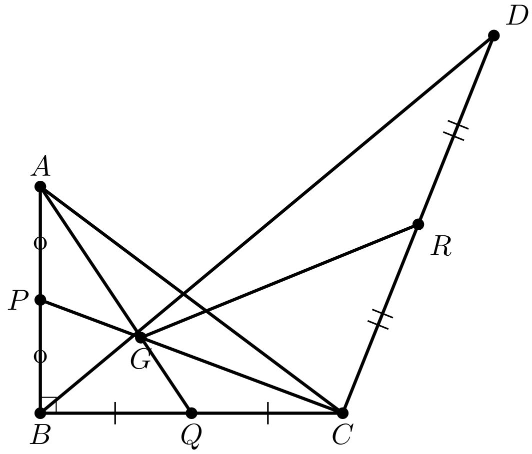
   Catatan : Pasangan (x, y) dan (y, x) tidak dibedakan

7. Suatu bilangan S dinyatakan dengan menuliskan bilangan dari 1 sampai 2020, yaitu
$$S = 123456789101112131415\cdots 2017201820192020$$
Tentukan sisa pembagian S jika dibagi 18.

8. Tentukan banyak bilangan bulat yang dapat dinyatakan $\frac{x^2+1}{x-1}$ dimana x bilangan real dan $x \neq 1$ serta memenuhi
$$3 \leq \frac{x^4+x^2+2x}{x^2-2x+1} \leq 2020$$

9. Tentukan jumlah semua bilangan prima p sehingga $11^p + 13^{p+1}$ habis dibagi p.

10. Diberikan segitiga siku-siku ABC dimana $\angle ABC = 90°$ seperti gambar di samping. Titik D terletak diluar segitiga ABC. Misalkan P, Q, dan R berturut-turut titik tengah AB, BC, dan CD. Misalkan AQ dan CP berpotongan di titik G. Panjang dari $AB = 15, BC = 12, BD = 20\sqrt{2}$, dan $CD = 4\sqrt{29}$, tentukan panjang RG.



II

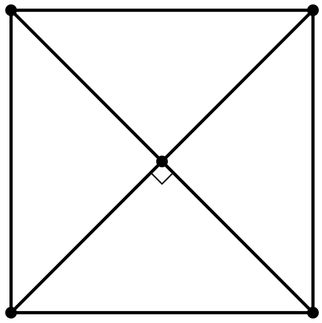
Soal dan Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Sebuah persegi memiliki panjang diagonal 8 satuan. Tentukan luas dari persegi tersebut.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{32}}$

   Perhatikan gambar berikut.

   Misalkan panjang sisi persegi adalah s. Maka panjang diagonalnya adalah

   $$8 = \sqrt{s^2 + s^2} = \sqrt{2s^2} = s\sqrt{2}$$

   sehingga

   $$s = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

   Maka luas dari persegi tersebut adalah $s^2 = \boxed{32}$ satuan luas.

   Solusi Alternatif. Persegi juga merupakan belah ketupat. Maka luasnya adalah

   $$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$$

   Jadi, luas persegi adalah $\boxed{32}$ satuan luas.

   > **Komentar.** Sebanyak 83.72% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**.

2. Garis $y = ax + b$ melalui titik $(2, 1)$ dan sejajar dengan garis $y = 4x - 1$. Tentukan nilai dari $a - b$.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{11}}$

   Karena garis $y = ax + b$ sejajar dengan garis $y = 4x - 1$, artinya kedua garis tersebut memiliki gradien yang sama. Maka $a = 4$. Demikian $y = 4x + b$. Garis tersebut melalui titik $(2, 1)$, maka

   $$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 4 + b \\ 1 &= 8 + b \\ b &= -7 \end{aligned}$$

   Maka $a - b = 4 - (-7) = \boxed{11}$.

> **Komentar.** Sebanyak 55.81% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah-sedang**. Mengingat bahwa gradien dari dua garis yang sejajar adalah sama. Materi ini dipelajari di kelas VIII (kelas 2 SMP).

3. Diberikan barisan aritmetika yang suku-sukunya adalah $a_1, a_2, a_3, \cdots$. Jika $a_{1010} = 2021$ dan $a_{2020} = 4041$, maka tentukan nilai a_{3030}.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{6061}}$

   Misalkan $a_n = a + (n-1)b$. Maka $2021 = a + 1009b$ dan $4041 = a + 2019b$. Dengan mengurangkan dua persamaan tersebut, maka

   $$4041 - 2021 = a + 2019b - a - 1009b = 1010b \iff 2020 = 1010b$$

   sehingga $b = 2$. Subtitusi,

   $$a = 2021 - 1009b = 2021 - 1009 \cdot 2 = 2021 - 2018 = 3$$

   Demikian
   $$a_n = a + (n-1)b = 3 + (n-1) \cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

   Maka $a_{3030} = 2 \cdot 3030 + 1 = \boxed{6061}$.

> **Komentar.** Sebanyak 88.37% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**. Materi ini dipelajari di kelas VIII (kelas 2 SMP).

4. Jumlah kaki-kaki dari beberapa kambing, ayam, dan tikus adalah 20 kaki. Jika banyak seluruh kambing, ayam, dan tikus berjumlah 6 ekor, tentukan jumlah dari banyak kambing dan tikus.

   Jawab: $\boxed{4}$

   Misalkan k menyatakan banyak kambing, a menyatakan banyak ayam, dan t menyatakan banyak tikus. Jumlah kaki-kaki dari kambing, ayam dan tikus adalah 20 kaki. Maka $4k + 2a + 4t = 20$. Jumlah seluruh kambing, ayam, tikus adalah 6. Maka $k + a + t = 6$. Sehingga $a = 6 - t - k$. Maka

   $$\begin{aligned} 4k + 2a + 4t &= 20 \\ 4k + 2(6 - t - k) + 4t &= 20 \\ 4k + 12 - 2t - 2k + 4t &= 20 \\ 2k + 2t &= 20 - 12 \\ 2(k + t) &= 8 \\ k + t &= 4 \end{aligned}$$

   Jadi, jumlah kambing dan ayam adalah $\boxed{4}$.

> **Komentar.** Sebanyak 93.02% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Ini merupakan soal **termudah** di bagian kemampuan dasar.

5. Diberikan grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dan menyinggung sumbu-x di titik $(2, 0)$. Tentukan nilai dari $\dfrac{c - b}{a}$.

   Jawab: $\boxed{8}$

Karena $y = ax^2 + bx + c$ menyinggung di titik $(2, 0)$, artinya titik $(2, 0)$ merupakan titik puncak dari $y = ax^2 + bx + c$. Sehingga

$$-\frac{b}{2a} = 2 \iff b = -4a$$

Karena menyinggung sumbu-x, maka diskriminannya harus 0. Sehingga

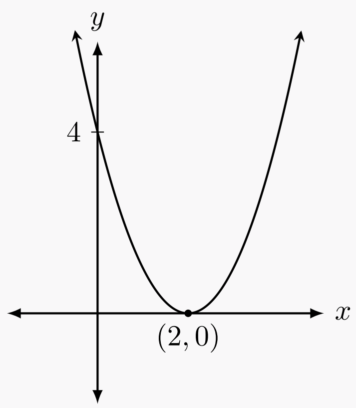
$$\begin{aligned} 0 &= b^2 - 4ac \\ &= (-4a)^2 - 4ac \\ &= 16a^2 - 4ac \\ &= 4a - c \\ c &= 4a \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{c-b}{a} = \frac{4a-(-4a)}{a} = \frac{8a}{a} = 8$$

Jadi, nilai dari $\frac{c-b}{a} = \boxed{8}$.

Komentar. Sebanyak 30.23% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**. Ide bahwa titik singgung grafik fungsi kuadrat merupakan titik puncaknya merupakan salah satu ide utama dalam menyelesaikan soal ini. Materi ini dipelajari di kelas VIII (kelas 2 SMP).



6. Penta ingin membuat gedung yang terdiri dari 3 kubus berukuran $1 \times 1 \times 1$, 2 balok berukuran $1 \times 1 \times 2$, dan 5 balok berukuran $1 \times 1 \times 3$ bersusun keatas dimana semuanya harus terpakai. Tentukan banyak cara Penta membuat gedung tersebut.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{2520}}$

   Permasalah ini merupakan permutasi n objek yang sama. Maka banyak cara menyusun balok-balok tersebut adalah

$$\frac{(3+2+5)!}{3!2!5!} = \frac{10!}{3!2!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 2} = \boxed{2520}$$

Komentar. Sebanyak 20.93% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Permasalah soal ini terkait dengan menyusun beberapa objek yang identik, sehingga merupakan permasalah permutasi dengan unsur yang sama.

7. Diberikan enam buah balok yang berukuran besar. Dipilih empat balok berukuran besar, lalu masing-masing dipotong menjadi sepuluh balok berukuran sedang. Dipilih 20 balok berukuran sedang, lalu masing-masing dipotong menjadi 35 balok berukuran kecil. Tentukan banyak balok seluruhnya.

   Jawab: $\boxed{\textbf{722}}$

   Misalkan enam balok besar tersebut adalah $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_6$. Sebanyak empat balok besar dipilih, misalkan B_1, B_2, B_3, B_4. Sehingga tersisa balok besar B_5, B_6.

   Balok-balok besar yang terpilih dipotong menjadi sepuluh balok berukuran sedang. Karena ada 4 balok besar, maka banyak balok berukuran sedang adalah $4 \cdot 10 = 40$ balok. Misalkan balok-balok tersebut adalah $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{40}$. Dipilih 20 balok berukuran sedang, misalkan yang dipilih adalah $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{20}$. Maka tersisa 20 balok sedang, yaitu $S_{21}, S_{22}, S_{23}, \cdots, S_{40}$.

   Balok-balok berukuran sedang dipotong menjadi 35 balok berukuran kecil. Karena ada 20 balok sedang, maka ada $20 \cdot 35 = 700$ balok berukuran kecil. Misalkan balok-balok kecil itu adalah $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_{700}$.

   Banyak balok berukuran besar yang tersisa adalah 2, yaitu B_1, B_2. Banyak balok berukurang sedang yang tersisa adalah 20, yaitu $S_{21}, S_{22}, S_{23}, \cdots, S_{40}$. Banyak balok berukruan kecil adalah 700, yaitu $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_{700}$. Sehingga banyak balok seluruhnya adalah $2 + 20 + 700 = \boxed{722}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 69.76% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini tergolong **mudah-sedang**.

8. Diberikan bilangan real a, b, c, d tak nol yang memenuhi

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 7$$
$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{7}{3}$$

   Tentukan nilai dari

$$9\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2\right]$$

   Jawab: $\boxed{\textbf{370}}$

   Misalkan $x = \dfrac{a}{b}$ dan $y = \dfrac{c}{d}$. Kita ingin mencari nilai dari

$$9\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2\right] = 9\left[(x-y)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2\right]$$

   Dari persamaan yang telah diketahui, maka

$$x + y = 7 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{3}$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{7}{3}\\
\frac{y+x}{xy}&=\frac{7}{3}\\
\frac{7}{xy}&=\frac{7}{3}\\
xy&=3
\end{aligned}$$

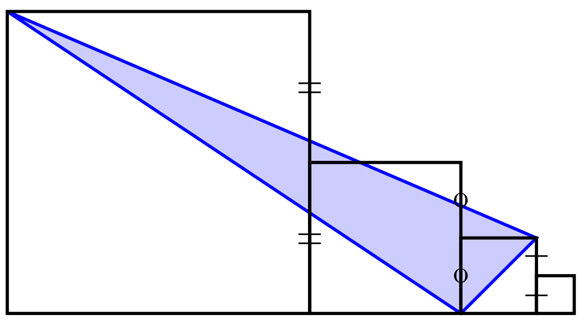
Maka

$$\begin{aligned}
9\left[(x-y)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\right]&=9\left[x^2-2xy+y^2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}\right]\\
&=9\left[x^2-2(3)+y^2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{y^2}\right]\\
&=9\left[x^2+y^2-6+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{3}\right]\\
&=9\left[(x+y)^2-2xy-6+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{2}{xy}-\frac{2}{3}\right]\\
&=9\left[49-2(3)-6+\frac{49}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right]\\
&=9\left[49-6-6+\frac{49}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right] \qquad =441-54-54+49-\\
&=370
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $9\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)^2\right]$ adalah $\boxed{370}$.

> **Komentar.** Sebanyak 34.88% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**. Untuk mempermudah manipulasi aljabar, dapat memisalkan dengan $x=\frac{a}{b}$ dan $y=\frac{c}{d}$. Sehingga didapatkan seperti persamaan diatas.

9. Diberikan sebuah persegi besar. Dibuat persegi yang lebih kecil di sebelah kanan persegi terbesar dengan panjang sisi setengah dari panjang sisi persegi lebih besar. Lalu, dibuat persegi yang lebih kecil lagi dengan cara yang sama hingga terbentuk empat persegi seperti gambar berikut.



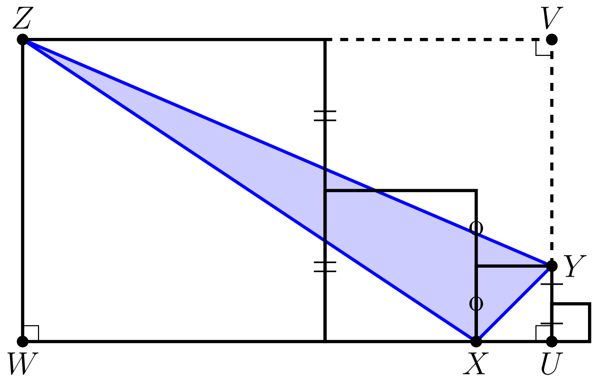
Jumlah luas dari empat persegi tersebut adalah 340 satuan luas. Tentukan luas daerah yang diarsir.

Jawab: $\boxed{80}$

Misalkan panjang sisi persegi terkecil adalah s. Maka panjang sisi persegi yang lain adalah $2s, 4s$, dan $8s$. Jumlah luas dari empat persegi tersebut adalah 340 satuan luas. Artinya,

$$\begin{aligned} s^2 + 4s^2 + 16s^2 + 64s^2 &= 340 \\ 85s^2 &= 340 \\ s^2 &= 4 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

Perhatikan gambar berikut! Konstruksi persegi panjang $WUVZ$.



Panjang dari $WZ = 8s = 16$ satuan dan panjang $WU = 8s + 4s + 2s = 14s = 28$ satuan. Sehingga luas persegi panjang $WUVZ$ adalah

$$L_{WUVZ} = 28 \cdot 16 = 448 \text{ satuan luas}$$

Panjang $WX = 8s + 4s = 12s = 24$ satuan, panjang $YU = XU = 2s = 4$ satuan, dan panjang $YV = 8s - 2s = 6s = 12$ satuan. Luas dari $\triangle WXZ$,

$$L_{\triangle WXZ} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192 \text{ satuan luas}$$

Luas dari $\triangle XUY$,

$$L_{\triangle XUY} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ satuan luas}$$

Perhatikan bahwa panjang $ZY = WU$. Maka luas dari $\triangle YVZ$,

$$L_{\triangle YVZ} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 28 = 168 \text{ satuan luas}$$

Sehingga luas dari $\triangle XYZ$,

$$\begin{aligned} L_{\triangle XYZ} &= L_{WUVZ} - L_{\triangle WXZ} - L_{\triangle XUY} - L_{\triangle YVZ} \\ &= 448 - 192 - 8 - 168 \\ L_{\triangle XYZ} &= 80 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\boxed{80}$ satuan luas.

Komentar. Sebanyak 67.44% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah mudah-sedang. Menarik garis bantu dan membuat suatu bangun menjadi bangun yang utuh dapat membantu kita dalam mengerjakan soal geometri, salah satunya mengenai luas bangun.

10. Misalkan akar-akar dari persamaan kuadrat dari $x^2 + ax + b = 0$ adalah x_1 dan x_2 serta memenuhi $x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1^3 + x_2^3 = 52$. Jika persamaan kuadrat $2x^2 - px + q = 0$ memiliki akar-akar $x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}$ dan $x_2^2 + \frac{1}{x_1^2}$, tentukan nilai dari $3(a + b + p + q)$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{183}}$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ 52 &= 4^3 - 3x_1x_2 \cdot 4 \\ 52 &= 64 - 12x_1x_2 \\ 12x_1x_2 &= 12 \\ x_1x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Teorema 1.0.1 (Teorema Vietta)

Jika $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2, maka

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Dari teorema tersebut, maka

$$\frac{-a}{1} = 4 \quad \text{dan} \quad \frac{b}{1} = 1$$

Maka $a = -4$ dan $b = 1$. Perhatikan bahwa

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2(1) = 16 - 2 = 14$$

Persamaan kuadrat $2x^2 - px + q = 0$ memiliki akar-akar $x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}$ dan $x_2^2 + \frac{1}{x_1^2}$. Maka

$$\begin{aligned} \frac{-(-p)}{2} &= x_1^2 + \frac{1}{x_2^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} \\ \frac{p}{2} &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \\ &= 14 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_1^2} \\ &= 14 + \frac{14}{(x_1x_2)^2} \\ &= 14 + \frac{14}{1^2} \\ &= 28 \\ p &= 56 \end{aligned}$$

Kita peroleh juga

$$\begin{aligned}\frac{q}{2} &= \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) \\ &= x_1^2x_2^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1^2x_2^2} \\ &= (x_1x_2)^2 + 2 + \frac{1}{(x_1x_2)^2} \\ &= 1 + 2 + \frac{1}{1} \\ &= 4 \\ q &= 8\end{aligned}$$

Maka kita peroleh

$$3(a+b+p+q) = 3(-4+1+56+8) = 3 \cdot 61 = \boxed{183}$$

Komentar. Sebanyak 34.88% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Soal ini memanfaatkan jumlah dan hasil kali akar pada persamaan kuadrat (atau umumnya teorema vietta).

2 Kemampuan Lanjut

1. Diberikan bilangan bilangan bulat $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2020}$ sehingga

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_1+a_2+a_3, \quad a_1+a_2+a_3+a_4, \quad \cdots, \quad a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2020}$$

merupakan bilangan bulat berurutan. Tentukan nilai dari $a_2a_3a_4\cdots a_{2020}$.

Jawab: $\boxed{1}$

Misalkan

$$u_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

Karena $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{2020}$ bilangan bulat berurutan, maka $u_k - u_{k-1} = 1$ untuk setiap $k = 2, 3, 4, \cdots, n$. Maka

$$1 = u_k - u_{k-1} = a_k$$

Demikian $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_{2020} = 1$ sehingga $a_2a_3\cdots a_{2020} = \boxed{1}$.

> **Komentar.** Sebanyak 60.46% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah-sedang**. Soal ini merupakan soal termudah pada kemampuan lanjut.

2. Tentukan banyak bilangan asli genap yang habis membagi $2^4 \times 3^5 \times 5^7$.

Jawab: $\boxed{192}$

Kita dapat menggunakan komplemen. Kita ingin mencari banyak bilangan asli ganjil yang habis membagi $2^4 \times 3^5 \times 5^7$, misalkan bilangan ganjil tersebut q. Artinya, haruslah $q = 3^a 5^b$ dimana $0 \leq a \leq 5$ dan $0 \leq b \leq 7$. Ada 6 kemungkinan untuk a dan ada 8 kemungkinan untuk b. Maka banyak bilangan ganjil q yang memenuhi adalah $6 \cdot 8 = 48$. Banyak bilangan asli yang habis membagi $2^4 \times 3^5 \times 5^7$ adalah

$$(4+1)(5+1)(7+1) = 5 \cdot 6 \cdot 8 = 240$$

Maka banyak bilangan ganjil yang habis membagi $2^4 \times 3^5 \times 5^7$ adalah $240 - 48 = \boxed{192}$.

> **Komentar.** Sebanyak 44.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**.

3. Terdapat 10 kado dengan 2 warna hijau, 5 warna biru, dan 4 warna merah. Kado yang memiliki warna sama identik. Kado-kado tersebut akan diberikan kepada Wildan, Bagus, dan 8 orang lainnya dimana setiap anak menerima 1 kado. Peluang Wildan mendapatkan kado hijau dan Bagus mendapatkan kado merah dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p,q) = 1$. Tentukan nilai $p \times q$.

Jawab: $\boxed{220}$

Misalkan kado hijau adalah HH, kado biru adalah $BBBBB$, dan kado merah adalah $MMMM$. Wildan harus mendapatkan H dan Bagus harus mendapatkan M. Maka susunan kado untuk 8 orang tersisa sama saja dengan menyusun $HBBBBBMMM$. Kasus ini merupakan permutasi n objek yang sama. Sehingga ada

$$\frac{(1+5+3)}{1!5!3!} = \frac{9!}{5!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Banyak cara menyusun kado-kado tersebut (tanpa syarat) dari $HHBBBBBMMMM$ adalah

$$\frac{(2+5+4)!}{2!5!4!} = \frac{11!}{2!5!4!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7$$

Sehingga peluangnya adalah

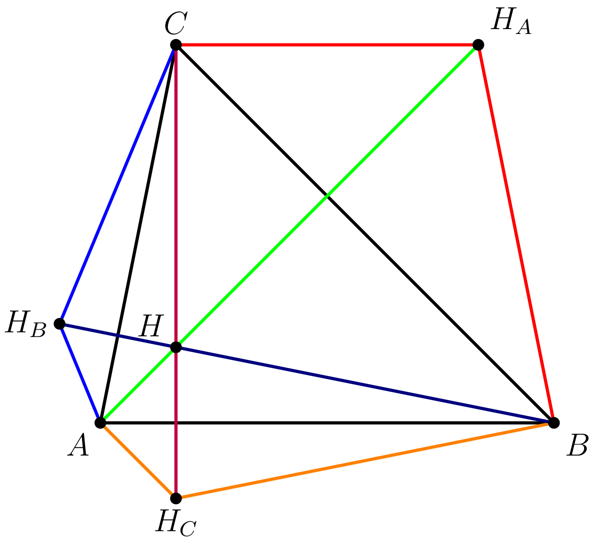
$$\frac{p}{q} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 7} = \frac{4}{55}$$

Maka $p = 4$ dan $q = 55$. Sehingga $p \times q = 4 \times 55 = \boxed{220}$.

> **Komentar.** Sebanyak 34.88% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**.

4. Misalkan H merupakan perpotongan garis-garis tinggi segitiga lancip ABC. Misalkan H_A merupakan pencerminan titik H terhadap sisi BC, titik H_B merupakan pencerminan titik H terhadap sisi AC, dan titik H_C merupakan pencerminan titik H terhadap sisi AB. Tentukan jumlah dari besar $\angle BH_AC + \angle CH_BA + \angle AH_CB$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{360^\circ}}$



Karena H_C titik pencerminan H terhadap sisi AB, maka panjang $AH = AH_C$ dan panjang $BH = BH_C$. Artinya, $\triangle AHB$ kongruen dengan $\triangle AH_CB$. Akibatnya,

$$\angle BH_CA = \angle BHA$$

Dengan cara yang sama, maka

$$\angle CH_BA = \angle CHA \quad \text{dan} \quad \angle AH_AC = \angle BHC$$

Maka

$$\begin{aligned}\angle BH_AC + \angle CH_BA + \angle AH_CB &= \angle BHC + \angle CHA + \angle AHB \\ &= 360^\circ\end{aligned}$$

Jadi, jumlah besar $\angle BH_AC + \angle CH_BA + \angle AH_CB$ adalah $\boxed{360^\circ}$.

> **Komentar.** Sebanyak 44.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Soal ini memanfaatkan fakta hasil pencerminan titik dan memanfaatkan kongruen.

5. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c) sehingga $2 \cdot 3^a + 3^b = 3^c$ dimana $c \leq 2020$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{2020}}$

Jelas bahwa $a, b < c$.

Kasus 1 : $\boldsymbol{a \geq b}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^a + 3^b &= 3^c \\ 3^b \left(2 \cdot 3^{a-b} + 1\right) &= 3^c \\ 2 \cdot 3^{a-b} + 1 &= 3^{c-b} \end{aligned}$$

Jika $a = b$, maka

$$3^{c-b} = 2 \cdot 3^0 + 1 = 2 + 1 = 3 \Longleftrightarrow c - b = 1$$

sehingga $c = b + 1$. Maka kita peroleh bahwa $(a, b, c) = (b, b, b + 1)$. Karena $c \leq 2020$, maka $b \leq 2019$. Sehingga pasangan $(a, b, c) = (b, b, b + 1)$ sama dengan banyak nilai b, yaitu $b = 0, 1, 2, 3, \cdots, 2019$. Yaitu ada 2020.

Jika $a > b$, maka 3^{a-b} kelipatan 3. Sehingga

$$2 \cdot 3^{a-b} + 1 \equiv 2 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 3$$

Padahal, 3^{c-b} kelipatan 3. Sehingga tidak mungkin persamaan $2 \cdot 3^{a-b} + 1 = 3^{c-b}$ terpenuhi.

Kasus 2 : $\boldsymbol{a < b}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^a + 3^b &= 3^c \\ 3^a \left(2 + 3^{b-a}\right) &= 3^c \\ 2 + 3^{b-a} &= 3^{c-a} \end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$2 + 3^{b-a} \equiv 3^{c-a} \equiv 0 \pmod 3$$

sehingga $2 + 3^{b-a}$ harus kelipatan 3. Tinjau juga

$$2 + 3^{b-a} \equiv 2 + 0 \equiv 2 \pmod 3$$

yang berarti bukan kelipatan 3. Kontradiksi.

Jadi, banyak pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c) yang memenuhi adalah $\boxed{2020}$.

> **Komentar.** Sebanyaj 34.88% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini tergolong **sedang-sulit**.

6. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y) sehingga $x^2 + y^2$ habis dibagi 49 dimana $x \leq 2020$ dan $y \leq 2020$.

   Catatan : Pasangan (x, y) dan (y, x) tidak dibedakan.

   Jawab: $\boxed{\textbf{41616}}$

   Kita uji semua kemungkinan x, y sehingga $x^2 + y^2$ habis dibagi 7. Perhatikan bahwa

   $$x^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$$

   Dengan mencoba semua kemungkinan, kondisi $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$ terjadi jika dan hanya jika

   $$x \equiv y \equiv 0 \pmod 7$$

   Akibatnya,

   $$x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod{49}$$

   yang berakibat $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{49}$. Bilangan kelipatan 7 yang tidak lebih 2020 ada $\left\lfloor \frac{2020}{7} \right\rfloor = 288$ bilangan.

   Jika $x = y$, maka ada 288 pasangan.

   Jika $x \neq y$, karena pasangan (x, y) dan (y, x) tidak dibedakan maka ada $C_2^{288} = \frac{288!}{2!286!} = 41.328$.

   Sehingga banyak pasangan seluruhnya adalah $41.328 + 288 = \boxed{41.616}$.

7. Suatu bilangan S dinyatakan dengan menuliskan bilangan dari 1 sampai 2020, yaitu

   $$S = 123456789101112131415 \cdots 2017201820192020$$

   Tentukan sisa pembagian S jika dibagi 18.

   Jawab: $\boxed{\textbf{10}}$

   Tinjau $18 = 2 \cdot 9$. Kita tinjau $S \pmod 2$ dan $S \pmod 9$.

   Karena S genap, maka $S \equiv 0 \pmod 2$.

   Untuk $S \pmod 9$. Jumlahkan semua bilangan dari 1 sampai 2020,

   $$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2020 = \frac{2020 \cdot 2021}{2} = 1010 \cdot 2021$$

   Karena $1010 \equiv 2 \pmod 9$ dan $2021 \equiv 5 \pmod 9$, maka

   $$S = 1010 \cdot 2021 \equiv 2 \cdot 5 \pmod 9 \iff S \equiv 10 \pmod 9$$

   Sehingga $S \equiv 1 \pmod 9$. Misalkan $S = 9k + 1$ dengan k bilangan asli. Maka

   $$\begin{aligned} S = 9k + 1 &\equiv 0 \pmod 2 \\ 9k &\equiv -1 \pmod 2 \\ k &\equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

   Misalkan $k = 2n + 1$ dengan n bilangan asli. Maka

   $$S = 9k + 1 = 9(2n + 1) + 1 = 18n + 9 + 1 = 18n + 10$$

   Jadi, sisa pembagian S jika dibagi 18 bersisa $\boxed{10}$.

> **Komentar.** Sebanyak 13.95% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka soal ini tergolong **sangat sulit**. Dengan meninjau $18 = 9 \times 2$ dan $FPB(9, 2) = 1$, kita dapat meninjau sisa pembagian S jika dibagi 2 dan 9. Selanjutnya dapat diselesaikan dalam bentuk $S \pmod 1)8$ seperti solusi diatas atau dapat menggunakan **Chinese Remainder Theorem**.

8. Tentukan jumlah semua bilangan prima p sehingga $11^p + 13^{p+1}$ habis dibagi p.

Jawab: $\boxed{10}$

Jika $p = 11$, maka

$$11^{11} + 13^{12} \equiv 0 + 13^{12} \equiv 13^{12} \pmod{11}$$

Tetapi, 11 tidak membagi 13. Maka tidak memenuhi. Jika $p = 13$, maka

$$11^{13} + 13^{14} \equiv 11^{13} + 0 \equiv 11^{13} \pmod{13}$$

Karena 11 tidak habis dibagi 13, maka tidak memenuhi.

Demikian $p \neq 11$ atau $p \neq 13$. Artinya, $FPB(p, 11) = FPB(p, 13) = 1$.

> **Teorema 2.0.1** (Fermat Little Theorem)
>
> Jika a bilangan asli dan p bilangan prima dimana $FPB(a, p) = 1$. Maka
>
> $$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Dari teorema tersebut, maka

$$11^{p-1} \equiv 1 \pmod p \implies 11^p \equiv 11 \pmod p$$

Dan juga

$$13^{p-1} \equiv 1 \pmod p \implies 13^{p+1} \equiv 169 \pmod p$$

Sehingga

$$11^p + 13^{p+1} \equiv 11 + 169 \equiv 180 \pmod p$$

Agar $11^p + 13^{p+1}$ habis dibagi p, maka 180 harus habis dibagi p. Karena $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, maka $p = 2, 3, 5$. Maka jumlah semua bilangan prima p yang memenuhi adalah $2 + 3 + 5 = \boxed{10}$.

> **Komentar.** Sebanyak 25.58% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Dengan memanfaatkan p bilangan prima, teorema yang berkaitan dengan perpangkatan adalah **Fermat's Little Theorem**.

9. Tentukan banyak bilangan bulat yang dapat dinyatakan $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ dimana x bilangan real dan $x \neq 1$ serta memenuhi

$$3 \leq \frac{x^4 + x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \leq 2020$$

Jawab: $\boxed{83}$

Misalkan $\dfrac{x^2+1}{x-1} = n$ dimana n bilangan bulat. Perhatikan bahwa

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} + 1 = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^2 = n^2$$

Sehingga

$$3 \leq \frac{x^4+x^2+2x}{x^2-2x+1} \leq 2020 \iff 4 \leq n^2 \leq 2021$$

Untuk $4 \leq n^2$, menyimpulkan

$$n \geq 2 \quad \text{atau} \quad n \leq -2 \tag{1}$$

Untuk $n^2 \leq 2021$, menyimpulkan

$$-\sqrt{2021} \leq n \leq \sqrt{2021}$$

Karena n bilangan bulat, hal diatas sama saja dengan

$$-44 \leq n \leq 44$$

Tinjau bentuk $\dfrac{x^2+1}{x-1} = n$. Maka

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x-1} &= n \\
x^2+1 &= n(x-1) \\
x^2+1 &= nx-n \\
x^2+1-nx+n &= 0 \\
x^2-nx+(n+1) &= 0
\end{aligned}$$

Karena persamaan kuadrat tersebut memiliki akar-akar real, maka diskriminannya tak negatif. Artinya,

$$\begin{aligned}
(-n)^2-4(n+1) &\geq 0 \\
n^2-4n-4 &\geq 0 \\
(n-2)^2-4-4 &\geq 0 \\
(n-2)^2 &\geq 8
\end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$n-2 \geq 2\sqrt{2} \text{ atau } n-2 \leq -2\sqrt{2} \iff n \geq 2+2\sqrt{2} \quad \text{atau} \quad n \leq 2-2\sqrt{2}$$

Karena n bilangan bulat, maka hal diatas sama saja dengan

$$n \geq 5 \quad \text{atau} \quad n \leq -1 \tag{3}$$

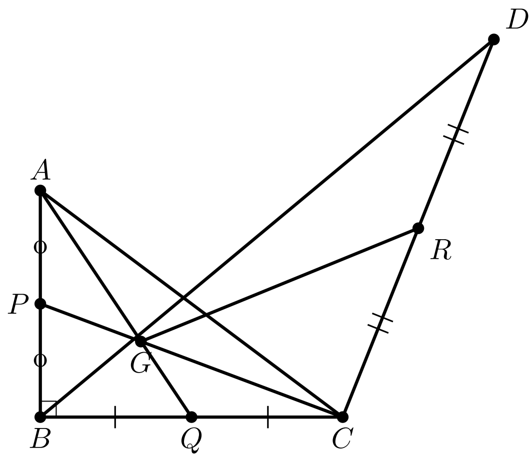
Dari (1), (2), dan (3), disimpulkan bahwa

$$-44 \leq n \leq -2 \text{ atau } 5 \leq n \leq 44$$

Untuk $-44 \leq n \leq -2$ ada 43 bilangan dan $5 \leq n \leq 44$ ada 40 bilangan. Sehingga banyak bilangan asli n yang memenuhi adalah $43+40 = \boxed{83}$.

> **Komentar.** Hanya ada 1 peserta yang berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini merupakan soal **tersulit** pada kemampuan lanjut. Tidak sedikit peserta yang kurang teliti dan mengira bahwa x bilangan bulat.

10. Diberikan segitiga siku-siku ABC dimana $\angle ABC = 90^\circ$ seperti gambar di samping. Titik D terletak diluar segitiga ABC. Misalkan P, Q, dan R berturut-turut titik tengah AB, BC, dan CD. Misalkan AQ dan CP berpotongan di titik G. Panjang dari $AB = 15, BC = 12, BD = 20\sqrt{2}$, dan $CD = 4\sqrt{29}$, tentukan panjang RG.



Jawab: $\boxed{13}$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $B = (0, 0)$. Maka $A = (0, 15)$ dan $C = (12, 0)$. Perhatikan bahwa G merupakan perpotongan garis berat, yaitu AQ dan CP. Artinya, G merupakan titik berat $\triangle ABC$. Akibatnya,

$$G = \left(\frac{0 + 12 + 0}{3}, \frac{0 + 0 + 15}{3}\right) = (4, 5)$$

Misalkan $D = (x, y)$. Dengan konsep jarak antar dua titik, jarak titik C dan D adalah

$$\begin{aligned} CR^2 &= (x - 12)^2 + y^2 \\ 464 &= x^2 - 24x + 144 + y^2 \\ 320 &= x^2 - 24x + y^2 \end{aligned}$$

Jarak titik B dan D adalah

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x - 0)^2 + (y - 0)^2 \\ 800 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Subtitusikan,

$$24x = x^2 + y^2 - 512 = 800 - 320 = 480 \iff x = 20$$

Subtitusikan, maka

$$y^2 = 800 - x^2 = 800 - 400 = 400 \iff y = 20$$

Demikian $D = (20, 20)$. Karena R titik tengah DC, maka

$$R = \left(\frac{20 + 12}{2}, \frac{20 + 0}{2}\right) = \left(\frac{32}{2}, \frac{20}{2}\right) = (16, 10)$$

Maka jarak titik R dan G adalah

$$RG^2 = (16 - 4)^2 + (10 - 5)^2 12^2 + 5^2 = 169 \iff RG = 13$$

Jadi, panjang RG adalah $\boxed{13}$.

Komentar. Sebanyak 23.25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Maka tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Soal ini dapat diselesaikan dengan menganggap bangun tersebut pada bidang koordinat-xy. Soal tersebut juga dapat diselesaikan dengan memanfaatkan luas, teorema stewart, phytagoras, atau dapat juga menggunakan trigonometri.